Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"
Proba pe echipe, clasele VII-VIII
27 octombrie 2013

Soluţii

BARAJUL al VII-lea

Problemă. Să se determine numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$ este cub perfect.

Soluţie:Fie $\overline{abc}$ un număr cu proprietatea din enunţ şi $k\in\mathbb{N}$ astfel ca

$\overline{abc}+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=k^3\Leftrightarrow 111a+21b+12c=k^3\Leftrightarrow 3\cdot(37a+7b+4c)=k^3$

$\Rightarrow 3/k$ şi $k^3\le 999+99+99+99=1296<1331=11^3\Rightarrow k<11.$

$k\in\{3,6,9\}.$

1. $k=6\Rightarrow 37a+7b+4c=72\Rightarrow a=1,7b+4c=35\Rightarrow b\ impar, b<5(c\neq 0).$

Dacă

$b=1\Rightarrow c=7,\overline{abc}=117,$

$b=3\Rightarrow 4c=14(nu\ convine)$

2. $k=9\Rightarrow 37a+7b+4c=243\Rightarrow\begin{cases}37a+11<243\Rightarrow a\le 6\\37a+63+36\ge 243\Rightarrow a\ge 4\end{cases}\Rightarrow a\in\{4,5,6\}.$

$a=4\Rightarrow 7b+4c=95\Rightarrow 7b+36\ge 95\Rightarrow b=9,c=8$

$\overline{abc}=498$

$a=5\Rightarrow 7b+4c=58\Rightarrow 7b+36\ge 58\Rightarrow 7b\ge 22\Rightarrow b>3, b=număr\ par$

$b=4\Rightarrow nu\ convine;$

$b=6\Rightarrow c=4$

$\overline{abc}=564.$

$a=6\Rightarrow 7b+4c=21\Rightarrow b\in\{1,3\}(nu\ convine)$

Răspuns: $\overline{abc}\in\{117,498,564\}$